

REPORTES INTERNOS 2015-01 / Febrero de 2015



TRAZADO DE LÍNEAS DE CORRIENTE EN GEOMETRÍAS
GENERALES USANDO UN MODELO MIXTO: 3D Y 2D

Norberto C. Vera Guzmán



Instituto de Geofísica, UNAM
Ciudad Universitaria
04510 México, D. F.

REPORTES INTERNOS 2015-01 / Febrero de 2015

Editor / Ma. Aurora Armienta H.
Editor Técnico / Andrea Rostan Robledo
Diseño de portada e Interiores / Luis David Torres Ortuño
Edición / Freddy Godoy Olmedo
Apoyo Editorial / Elizabeth Morales Hernández
Vanessa Gómez Vivas

Trazado de Líneas de Corriente en Geometrías Generales Usando un Modelo Mixto: 3D y 2D

Norberto C. Vera Guzmán

4 de febrero de 2015

Índice

Índice de figuras	ii
1. Introducción	1
2. Trazado de líneas de corriente: caso 3D	1
2.1. Conceptos de elemento real y de referencia	3
2.2. Cálculo de velocidades	4
2.3. Trazado elemento por elemento	5
3. Trazado de líneas de corriente: caso 2D	7
3.1. Cálculo de velocidades	7
3.2. Trazado elemento por elemento	8
4. Resultados	10
5. Conclusiones	14
Referencias	15

Índice de figuras

1.	Secuencia a seguir para el trazado de un segmento de línea de corriente, utilizando un elemento de referencia $\hat{\Omega}$, un elemento real Ω , el campo de velocidades \mathbf{u} y una transformación afín.	2
2.	Campo de presiones modelo mixto caso 3D y ubicación de fuentes y sumideros.	10
3.	Campo de velocidades modelo mixto caso 3D	11
4.	Campo de velocidades y líneas de corriente caso 3D	11
5.	Líneas de corriente caso 3D	12
6.	Solución velocidad-presión para un modelo mixto caso 2D	12
7.	Campo de velocidades y líneas de corriente caso 2D	13
8.	Líneas de corriente caso 2D	13

Líneas de Corriente en GG en 3D y 2D

Norberto C. Vera Guzmán

1. Introducción

En este trabajo se presenta el trazado de líneas de corriente en Geometrías Generales (GG) para mallas no estructuradas considerando los casos 3D y 2D. En la primera parte se presenta el trazado de líneas de corriente considerando mallas tetrahédricas en Geometrías Generales en 3D, y en la segunda, se muestra el trazado de líneas de corriente para el caso especial 2D. El propósito del trabajo es extender la metodología desarrollada por Sébastien [1] para el caso 2D y llevarla al caso 3D.

La metodología usada para el trazado de líneas de corriente en este trabajo, implica la resolución de un problema mixto de flujo de un fluido en un medio poroso y utilizar los coeficientes de elemento finito mixto del campo de velocidades.

La motivación para desarrollar una herramienta que permita el trazado de líneas de corriente está asociada con el hecho de que, para tratar problemas de flujo multifásico es necesario resolver problemas de flujo y problemas de transporte acoplados en el mismo dominio, y en general estos últimos son muy pesados computacionalmente. Sin embargo, si se sustituye el dominio original tridimensional por un conjunto de líneas de corriente y se resuelven los problemas de transporte usando este conjunto de líneas de corriente, en lugar de resolver problemas 3D o 2D se tiene que resolver un conjunto de problemas 1D [1,5]. Esta metodología está siendo desarrollada actualmente para mallas estructuradas 3D como parte de un proyecto entre el Instituto de Geofísica de la UNAM y PEMEX Exploración y Producción. Aquí presentamos la versión 3D para mallas no-estructuradas utilizando tetrahedros y triángulos.

2. Trazado de líneas de corriente: caso 3D

La secuencia a seguir para el trazado de líneas de corriente en este trabajo es la siguiente.

- Planteamiento de un problema de flujo tridimensional.
- Formulación de dicho problema utilizando un enfoque mixto (velocidad-presión) el cual puede o no incorporar descomposición de dominio (DDM) [3]. En la metodología utilizada aquí, si se incorpora descomposición de dominio, la numeración utilizada en los campos de velocidades locales asociados a cada subdominio, se debe homogeneizar y trabajar con una única numeración global para el campo de velocidades de todo el dominio.
- Resolución del modelo mixto utilizando elemento finito mixto en tres dimensiones. Como resultado de esto, se obtiene el campo de velocidades \mathbf{u} y el campo de presiones p en el subdominio.

- Trazado de cada línea de corriente elemento por elemento, partiendo de elementos donde se tengan definidas fuentes y terminando en elementos donde se tengan definidos sumideros.
- En la Figura 1 se muestra el trazado de un segmento de una línea de corriente.

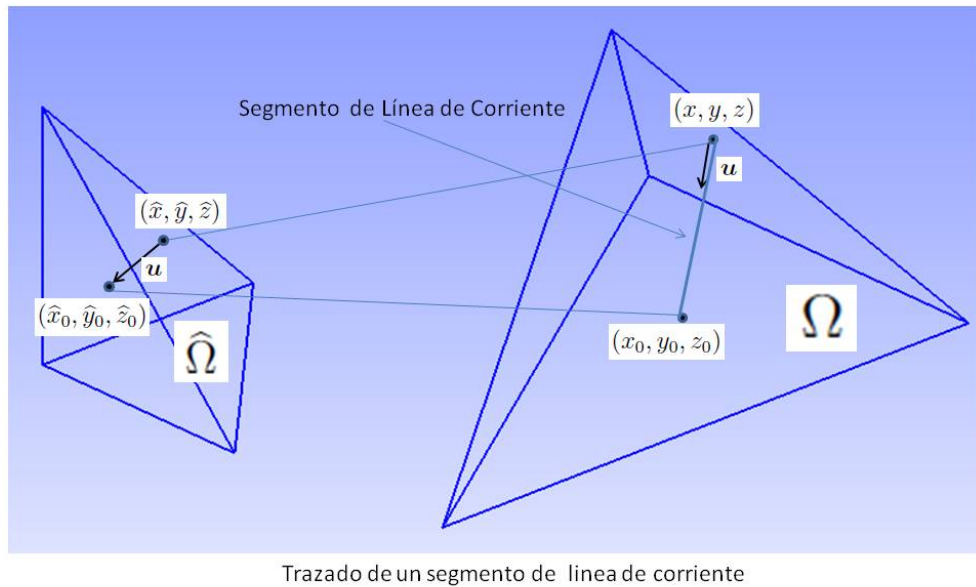


Figura 1: Secuencia a seguir para el trazado de un segmento de línea de corriente, utilizando un elemento de referencia $\hat{\Omega}$, un elemento real Ω , el campo de velocidades \mathbf{u} y una transformación afín.

En este trabajo, el trazado de líneas de corriente en una geometría general tridimensional inicia con la resolución de un problema mixto de flujo formulado en un espacio tridimensional [3].

Para hacer este planteamiento, el dominio del problema es mallado utilizando un conjunto de nodos y sus coordenadas y un conjunto de elementos definidos a partir de los nodos. Estos conjuntos constituyen la "malla del dominio".

Cuando se resuelve un problema mixto de flujo se consideran dos campos incógnita, uno asociado al campo de velocidades y otro al campo de presiones. Considerando el número de grados de libertad, el campo de velocidades está asociado a las caras de los elementos y el campo de presiones a los elementos de la malla, esto es, hay tantos grados de libertad asociados al campo de velocidades como caras en la malla, y tantos grados de libertad asociados al campo de presión como elementos en la malla.

El trazado de líneas de corriente en esta metodología se hace elemento por elemento de acuerdo a lo siguiente. Considerando que se ha obtenido el campo de velocidades como

resultado de resolver un modelo mixto para el problema de flujo, se toma un elemento de la malla y se calcula la velocidad \mathbf{u} en un punto (x, y, z) de una de las caras del dicho elemento. Si la velocidad es entrante $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} < 0$, se prolonga el vector \mathbf{u} en la dirección entrante para encontrar el punto de intersección (x_o, y_o, z_o) con alguna de las otras caras del elemento. Si la velocidad no es entrante $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \geq 0$, se busca otra cara del elemento donde sí se cumpla la condición $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} < 0$.

Observación 1. Este procedimiento solo se aplica a elementos donde no se tengan definidas fuentes o sumideros, dado que, las líneas de corriente inician en las fuentes y terminan en los sumideros.

Si se tienen ubicados los puntos (x, y, z) y (x_o, y_o, z_o) , se traza un segmento de recta entre estos puntos y se considera este segmento como parte de una línea de corriente que va de puntos fuente hacia puntos sumidero. Este proceso se repite para cada elemento hasta encontrar un elemento donde se tenga definido un sumidero.

Para el cálculo del tiempo de vuelo de una partícula viajando en esta trayectoria, se calcula la magnitud de la velocidad \mathbf{u} en el punto (x, y, z) y la distancia d entre los puntos (x, y, z) y (x_o, y_o, z_o) y se calcula el tiempo de vuelo τ_i como la razón $\tau_i = d_i / |\mathbf{u}_i|$. El tiempo total de vuelo τ para una línea de corriente completa, será la suma de todos los tiempos de vuelo locales $\tau = \sum_i \tau_i$ en cada elemento por donde pase la correspondiente línea de corriente.

2.1. Conceptos de elemento real y de referencia

Para propósitos del trazado de líneas de corriente en mallas no estructuradas usaremos los conceptos de elemento real Ω y de referencia $\hat{\Omega}$. Tales conceptos están relacionados de la siguiente manera.

Sean Ω un tetrahedro real con vértices $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ y $\hat{\Omega}$ un tetrahedro de referencia con vértices $\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{x}}_3, \hat{\mathbf{x}}_4$, cuyas coordenadas pueden ser expresadas como:

Si en lugar de considerar un triángulo real y un triángulo de referencia en 2D, consideramos un tetrahedro real Ω y un tetrahedro de referencia $\hat{\Omega}$ en 3D, las correspondientes coordenadas de los puntos que definen a cada tetrahedro serán

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= (x_1, y_1, z_1), \\ \mathbf{x}_2 &= (x_2, y_2, z_2), \\ \mathbf{x}_3 &= (x_3, y_3, z_3), \\ \mathbf{x}_4 &= (x_4, y_4, z_4), \end{aligned} \tag{1}$$

y

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_1 &= (\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{z}_1), \\ \hat{\mathbf{x}}_2 &= (\hat{x}_2, \hat{y}_2, \hat{z}_2), \\ \hat{\mathbf{x}}_3 &= (\hat{x}_3, \hat{y}_3, \hat{z}_3), \\ \hat{\mathbf{x}}_4 &= (\hat{x}_4, \hat{y}_4, \hat{z}_4). \end{aligned} \tag{2}$$

Los puntos $\mathbf{x} \in \Omega$ y los $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{\Omega}$ están relacionados por medio de

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \chi(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{x}_1 + \mathbf{D}\hat{\mathbf{x}}, \\ \hat{\mathbf{x}} &= \chi^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \end{aligned} \tag{3}$$

donde $\chi : \hat{\Omega} \rightarrow \Omega$ es una transformación afín, y en el caso de una malla constituida por tetrahedros, la matriz \mathbf{D} en (3) está expresada como: vease [4].

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} x_{21} & x_{31} & x_{41} \\ y_{21} & y_{31} & y_{41} \\ z_{21} & z_{31} & z_{41} \end{pmatrix} \quad (4)$$

donde, las entradas de \mathbf{D} , $x_{21}, y_{21}, z_{21}, \dots$ se calculan como:

$$\begin{aligned} x_{21} &= x_2 - x_1, \\ y_{21} &= y_2 - y_1, \\ z_{21} &= z_2 - z_1, \dots \end{aligned}$$

2.2. Cálculo de velocidades

Consideramos el caso tridimensional donde los elementos de la malla son tetrahedros. En este caso, cada tetrahedro queda definido por sus cuatro nodos que a su vez tienen las coordenadas dadas en (1). El campo de velocidades \mathbf{u} dentro de cada tetrahedro puede expresarse como una combinación lineal de las funciones base vectoriales lineales $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}$ asociadas a cada cara del tetrahedro.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \alpha_1 \phi_1(\mathbf{x}) + \alpha_2 \phi_2(\mathbf{x}) + \alpha_3 \phi_3(\mathbf{x}) + \alpha_4 \phi_4(\mathbf{x}). \quad (5)$$

La relación que existe entre las funciones base definidas en un elemento real Ω y las definidas en un elemento de referencia $\hat{\Omega}$ [4,2], está dada por

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \frac{A_i}{J} \mathbf{D} \hat{\phi}_i(\hat{\mathbf{x}}), \quad i = \{1, 2, 3, 4\}. \quad (6)$$

donde, $J = \det(\mathbf{D})$ y A_i es el área de la cara del tetrahedro opuesta al nodo i y la relación entre \mathbf{x} y $\hat{\mathbf{x}}$ está dada por (3).

Utilizando (6) expresamos la velocidad \mathbf{u} en términos de las coordenadas locales $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$

$$\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}) = \alpha_1 \frac{A_1}{J} \mathbf{D} \hat{\phi}_1(\hat{\mathbf{x}}) + \alpha_2 \frac{A_2}{J} \mathbf{D} \hat{\phi}_2(\hat{\mathbf{x}}) + \alpha_3 \frac{A_3}{J} \mathbf{D} \hat{\phi}_3(\hat{\mathbf{x}}) + \alpha_4 \frac{A_4}{J} \mathbf{D} \hat{\phi}_4(\hat{\mathbf{x}}). \quad (7)$$

Las componentes (u_x, u_y, u_z) del vector velocidad \mathbf{u} pueden expresarse como

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \alpha_1 \frac{A_1}{J} \mathbf{D} \hat{\phi}_1 + \alpha_2 \frac{A_2}{J} \mathbf{D} \hat{\phi}_2 + \alpha_3 \frac{A_3}{J} \mathbf{D} \hat{\phi}_3 + \alpha_4 \frac{A_4}{J} \mathbf{D} \hat{\phi}_4 \\ &= \alpha_1 \frac{A_1}{J} \mathbf{D} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} + \alpha_2 \frac{A_2}{J} \mathbf{D} \begin{pmatrix} \hat{x} - 1 \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} + \alpha_3 \frac{A_3}{J} \mathbf{D} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} - 1 \\ \hat{z} \end{pmatrix} + \alpha_4 \frac{A_4}{J} \mathbf{D} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} - 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{J} \mathbf{D} \left(\alpha_1 A_1 \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} + \alpha_2 A_2 \begin{pmatrix} \hat{x} - 1 \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} + \alpha_3 A_3 \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} - 1 \\ \hat{z} \end{pmatrix} + \alpha_4 A_4 \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} - 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{J} \mathbf{D} \begin{pmatrix} (A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 + A_3 \alpha_3 + A_4 \alpha_4) \hat{x} - A_2 \alpha_2 \\ (A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 + A_3 \alpha_3 + A_4 \alpha_4) \hat{y} - A_3 \alpha_3 \\ (A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 + A_3 \alpha_3 + A_4 \alpha_4) \hat{z} - A_4 \alpha_4 \end{pmatrix} \\ \mathbf{u} &= \frac{1}{J} \mathbf{D} \begin{pmatrix} A \hat{x} - A_2 \alpha_2 \\ A \hat{y} - A_3 \alpha_3 \\ A \hat{z} - A_4 \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

donde:

$$A = (A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3 + A_4\alpha_4). \quad (9)$$

Entonces, las componentes (u_x, u_y, u_z) del vector velocidad \mathbf{u} , las podemos escribir como

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \mathbf{D} \begin{pmatrix} A\hat{x} - A_2\alpha_2 \\ A\hat{y} - A_3\alpha_3 \\ A\hat{z} - A_4\alpha_4 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Como puede verse en (10), las componentes (u_x, u_y, u_z) de la velocidad dependen de las coordenadas $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ en el elemento $\hat{\Omega}$. Entonces, si queremos calcular la velocidad de una partícula ubicada en el punto $\mathbf{x} = (x, y, z)$ de Ω , requerimos mapear $(x, y, z) \in \Omega \Rightarrow (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \in \hat{\Omega}$ y utilizar (10) para conocer las componentes (u_x, u_y, u_z) de la velocidad \mathbf{u} en el punto $\mathbf{x} = (x, y, z)$.

2.3. Trazado elemento por elemento

Para el trazado de una línea de corriente, es necesario hacerlo elemento por elemento. Consideremos un tetrahedro Ω y tomemos un punto $(x, y, z) \in \Omega$ en una cara en la cual la velocidad sea entrante $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} < 0$ (\mathbf{n} es un vector normal exterior), y tomemos las componentes de la velocidad (u_x, u_y, u_z) dadas en (10). A continuación mapeamos el punto $(x, y, z) \in \Omega$ en el punto $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \in \hat{\Omega}$ sobre la cara del elemento de referencia ubicada en el plano $\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} = 1$, y calculemos la ecuación de la recta que pasa por ese punto y que tiene la dirección del vector velocidad $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$. La ecuación de esta recta puede expresarse como

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \quad (11)$$

Considerando que el elemento de referencia es un tetrahedro y que la velocidad es entrante, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} < 0$, la recta que pasa por el punto $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ y tiene la dirección de la velocidad \mathbf{u} , interseca alguno de los planos coordenados $(\hat{X}\hat{Y}, \hat{X}\hat{Z}, \hat{Y}\hat{Z})$ en un punto $(\hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{z}_0)$. Este punto necesariamente cumple con una de las siguientes condiciones

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{y}_0 \\ \hat{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{y}_0 \\ \hat{z}_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{y}_0 \\ \hat{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ 0 \\ \hat{z}_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{y}_0 \\ \hat{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{y}_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Entonces, a partir de la expresión de la recta

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{y}_0 \\ \hat{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x} + tu_x \\ \hat{y} + tu_y \\ \hat{z} + tu_z \end{pmatrix} \quad (13)$$

se puede calcular el valor del parámetro t de acuerdo a lo siguiente.

Si $\hat{x}_0 = 0$, $t = \frac{-\hat{x}}{u_x}$, el punto de salida tiene coordenadas

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{y}_0 \\ \hat{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{y} - \frac{\hat{x}}{u_x} u_y \\ \hat{z} - \frac{\hat{x}}{u_x} u_z \end{pmatrix} \quad \text{Intersección con el plano } \hat{Y}\hat{Z} \quad (14)$$

Si $\hat{y}_0 = 0$, $t = \frac{-\hat{y}}{u_y}$, y el punto de salida tiene coordenadas

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{y}_0 \\ \hat{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x} - \frac{\hat{y}}{u_y} u_x \\ 0 \\ \hat{z} - \frac{\hat{y}}{u_y} u_z \end{pmatrix} \quad \text{Intersección con el plano } \hat{X}\hat{Z} \quad (15)$$

Si $\hat{z}_0 = 0$, $t = \frac{-\hat{z}}{u_z}$, y el punto de salida tiene coordenadas

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{y}_0 \\ \hat{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x} - \frac{\hat{z}}{u_z} u_x \\ \hat{y} - \frac{\hat{z}}{u_z} u_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Intersección con el plano } \hat{X}\hat{Y} \quad (16)$$

En cualquiera de los casos anteriores (14)-(16), las coordenadas $(\hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{z}_0)$ del punto de salida, deben satisfacer la condición

$$0 \leq \hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{z}_0 \leq 1 \quad (17)$$

Si la condición (17) no se cumple, la ubicación del punto de salida será mal ubicado.

Esta forma de calcular las componentes de la velocidad \mathbf{u} en un punto $(x, y, z) \in \Omega$ utilizando un punto $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \in \hat{\Omega}$, (10), permite que dadas las coordenadas de un punto $(x, y, z) \in \Omega$ y conocidos los coeficientes de elemento finito α_i de la velocidad \mathbf{u} , podamos obtener el punto de salida $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$, mapeando el punto de salida $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ en el elemento de referencia. Con ello se puede trazar un segmento de una línea de corriente.

Utilizando las coordenadas del punto de entrada $(x, y, z) \in \Omega$ y el punto de salida $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$, se puede calcular la distancia recorrida por una partícula y con ello su tiempo de vuelo en el elemento.

Para continuar con el trazado de la línea de corriente, ahora usamos el punto de salida $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ como punto de entrada $(x, y, z) \in \Omega$ en el siguiente elemento, lo mapeamos hacia el punto $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \in \hat{\Omega}$, calculamos las componentes del vector velocidad \mathbf{u} en el nuevo punto de entrada, ecuación (10), establecemos la ecuación de la recta, ecuación (13), y calculamos coordenadas del punto de salida $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$, a través del mapeo del punto de salida $(\hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{z}_0) \in \hat{\Omega}$ en el elemento de referencia.

Este procedimiento hay que repetirlo tantas veces como sea necesario hasta encontrar un elemento donde se tenga definido un sumidero. Cuando se encuentra tal elemento se termina el proceso de trazado de una línea de corriente.

Para iniciar el trazado de una nueva línea de corriente, nos ubicamos en la cara de un elemento en contacto con un elemento con una fuente definida, y repetimos todo el procedimiento descrito arriba.

3. Trazado de líneas de corriente: caso 2D

Como caso particular del trazado de líneas de corriente en 3D, mostramos la forma de hacerlo en el caso 2D. El procedimiento a seguir es el mismo.

Sean Ω un triángulo real con vértices $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ y $\hat{\Omega}$ un triángulo de referencia con vértices $\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{x}}_3$, cuyas coordenadas pueden ser expresadas como:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1 &= (x_1, y_1), \\ \mathbf{x}_2 &= (x_2, y_2), \\ \mathbf{x}_3 &= (x_3, y_3),\end{aligned}\tag{18}$$

y

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_1 &= (\hat{x}_1, \hat{y}_1), \\ \hat{\mathbf{x}}_2 &= (\hat{x}_2, \hat{y}_2), \\ \hat{\mathbf{x}}_3 &= (\hat{x}_3, \hat{y}_3).\end{aligned}\tag{19}$$

Como ya se dijo antes, los puntos $\mathbf{x} \in \Omega$ y los $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{\Omega}$ están relacionados por medio de

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \boldsymbol{\chi}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{x}_1 + \mathbf{D}\hat{\mathbf{x}}, \\ \hat{\mathbf{x}} &= \boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)\end{aligned}\tag{20}$$

donde $\boldsymbol{\chi} : \hat{\Omega} \rightarrow \Omega$ es una transformación afín, y en el caso de una malla constituida por triángulos, la matriz \mathbf{D} en (20) está expresada como:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} x_{21} & x_{31} \\ y_{21} & y_{31} \end{pmatrix}\tag{21}$$

donde, las entradas de \mathbf{D} , x_{21}, y_{21}, \dots se calculan como:

$$\begin{aligned}x_{21} &= x_2 - x_1, \\ y_{21} &= y_2 - y_1, \dots\end{aligned}$$

3.1. Cálculo de velocidades

Consideramos el caso bidimensional donde los elementos de la malla son triángulos y cada triángulo está definido por sus tres nodos, que a su vez, tienen las coordenadas dadas por (18). El campo de velocidades \mathbf{u} dentro de cada elemento triangular, puede expresarse como una combinación lineal de las funciones base $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ asociadas a cada arista del triángulo

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \alpha_1 \phi_1(\mathbf{x}) + \alpha_2 \phi_2(\mathbf{x}) + \alpha_3 \phi_3(\mathbf{x}).\tag{22}$$

Utilizando la relación que existe entre las funciones base definidas en un elemento real Ω y las definidas en un elemento de referencia $\hat{\Omega}$ [4,2],

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \frac{L_i}{J} \mathbf{D} \hat{\phi}_i(\hat{\mathbf{x}}), \quad i = \{1, 2, 3\}\tag{23}$$

donde, $J = \det(\mathbf{D})$, L_i la longitud de la arista opuesta al nodo i y los puntos \mathbf{x} y $\hat{\mathbf{x}}$ están relacionados por (3).

Utilizando (23) expresamos la velocidad \mathbf{u} en términos de las coordenadas locales (\hat{x}, \hat{y})

$$\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}) = \alpha_1 \frac{L_1}{J} \mathbf{D} \hat{\phi}_1(\hat{\mathbf{x}}) + \alpha_2 \frac{L_2}{J} \mathbf{D} \hat{\phi}_2(\hat{\mathbf{x}}) + \alpha_3 \frac{L_3}{J} \mathbf{D} \hat{\phi}_3(\hat{\mathbf{x}}) \quad (24)$$

Las componentes (u_x, u_y) del vector velocidad \mathbf{u} en el caso bidimensional, pueden expresarse de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \alpha_1 \frac{L_1}{J} \mathbf{D} \hat{\phi}_1 + \alpha_2 \frac{L_2}{J} \mathbf{D} \hat{\phi}_2 + \alpha_3 \frac{L_3}{J} \mathbf{D} \hat{\phi}_3 \\ &= \alpha_1 \frac{L_1}{J} \mathbf{D} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + \alpha_2 \frac{L_2}{J} \mathbf{D} \begin{pmatrix} \hat{x} - 1 \\ \hat{y} \end{pmatrix} + \alpha_3 \frac{L_3}{J} \mathbf{D} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} - 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{J} \mathbf{D} \left(\alpha_1 L_1 \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + \alpha_2 L_2 \begin{pmatrix} \hat{x} - 1 \\ \hat{y} \end{pmatrix} + \alpha_3 L_3 \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} - 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{J} \mathbf{D} \begin{pmatrix} (L_1 \alpha_1 + L_2 \alpha_2 + L_3 \alpha_3) \hat{x} - L_2 \alpha_2 \\ (L_1 \alpha_1 + L_2 \alpha_2 + L_3 \alpha_3) \hat{y} - L_3 \alpha_3 \end{pmatrix} \\ \mathbf{u} &= \frac{1}{J} \mathbf{D} \begin{pmatrix} A \hat{x} - L_2 \alpha_2 \\ A \hat{y} - L_3 \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (25)$$

donde:

$$A = (L_1 \alpha_1 + L_2 \alpha_2 + L_3 \alpha_3). \quad (26)$$

Entonces para el caso bidimensional, las componentes (u_x, u_y) del vector velocidad \mathbf{u} , las podemos escribir como

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \mathbf{D} \begin{pmatrix} A \hat{x} - L_2 \alpha_2 \\ A \hat{y} - L_3 \alpha_3 \end{pmatrix} \quad (27)$$

Como puede verse en (27), las componentes (u_x, u_y) de la velocidad dependen de las coordenadas (\hat{x}, \hat{y}) en el elemento $\hat{\Omega}$. Entonces, si queremos calcular la velocidad de una partícula ubicada en el punto $\mathbf{x} = (x, y)$ de Ω , requerimos mapear $(x, y) \in \Omega \Rightarrow (\hat{x}, \hat{y}) \in \hat{\Omega}$ y utilizar (27) para conocer las componentes (u_x, u_y) de la velocidad en el punto $\mathbf{x} = (x, y)$.

3.2. Trazado elemento por elemento

Para el caso 2D, consideremos un triángulo Ω y las componentes de la velocidad (u_x, u_y) definidas en (27). Tomamos un punto $(x, y) \in \Omega$ y lo mapeamos a un punto $(\hat{x}, \hat{y}) \in \hat{\Omega}$ sobre la arista del elemento de referencia ubicada en la recta $\hat{x} + \hat{y} = 1$, y calculamos la recta que pasa por ese punto y que tiene la dirección del vector velocidad $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$. La ecuación de esta recta puede expresarse como

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \quad (28)$$

Considerando que el elemento de referencia es un triángulo y que la velocidad es entrante, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} < 0$ (el vector normal unitario \mathbf{n} apunta hacia el exterior), la recta intersecta alguno de los ejes (\hat{X}, \hat{Y}) en un punto (\hat{x}_0, \hat{y}_0) que tiene las siguientes propiedades

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{y}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{y}_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{y}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Entonces, a partir de la expresión de la recta

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{y}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x} + tu_x \\ \hat{y} + tu_y \end{pmatrix} \quad (30)$$

podemos calcular el parámetro t de acuerdo a lo siguiente.

Si $\hat{x}_0 = 0$, $t = \frac{-\hat{x}}{u_x}$, el punto de salida tiene coordenadas

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{y}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{y} - \frac{\hat{x}}{u_x}u_y \end{pmatrix} \quad (31)$$

Si $\hat{y}_0 = 0$, $t = \frac{-\hat{y}}{u_y}$, y el punto de salida tiene coordenadas

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{y}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x} - \frac{-\hat{y}}{u_y}u_x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

En cualquiera de los casos anteriores, las coordenadas (\hat{x}_0, \hat{y}_0) del punto de salida, deben satisfacer la condición

$$0 \leq \hat{x}_0, \hat{y}_0 \leq 1 \quad (33)$$

Si la condición (33) no se cumple, la ubicación del punto de salida es incorrecto.

De manera semejante a como se hizo en el caso 3D, partiendo de un punto $(x, y) \in \Omega$ lo mapeamos hacia un punto $(\hat{x}, \hat{y}) \in \hat{\Omega}$ y conocidos los coeficientes de elemento finito α_i de la velocidad \mathbf{u} , podemos obtener el punto de salida de la partícula $(x_0, y_0) \in \Omega$ mapeando el punto $(\hat{x}_0, \hat{y}_0) \in \hat{\Omega}$.

4. Resultados

Como ejemplos de la metodología, se presenta el trazado de líneas de corriente en los casos tridimensional y bidimensional, basado en la solución de un modelo mixto 3D y 2D respectivamente. El problema de flujo usado para mostrar la metodología, considera un dominio con una geometría general tanto en 3D como en 2D.

Para el caso tridimensional se considera un problema de flujo monofásico en un dominio con una geometría general, condiciones de frontera de flujo cero, permeabilidad homogénea $K_x = K_y = K_z = 2 \times 10^{-12} m^2$, dos fuentes ubicadas en los elementos 277 y 326 de la malla del dominio con gasto $\hat{q} = 0,003 m^3/s$ cada una, y un sumidero ubicado en el elemento 288 de la malla del dominio con gasto $\hat{q} = -0,006 m^3/s$ (ver Figura 2).

Para el caso bidimensional, también se considera un problema de flujo monofásico con condiciones de frontera de flujo cero, una permeabilidad homogénea $K_x = K_y = 1 \times 10^{-10} m^2$, dos fuentes ubicadas en dos elementos en la parte izquierda del dominio con gasto $\hat{q} = 0,002 m^3/s$ y también, dos sumideros ubicados en dos elementos en la parte derecha del subdominio con gasto $\hat{q} = -0,002 m^3/s$ (ver Figura 6).

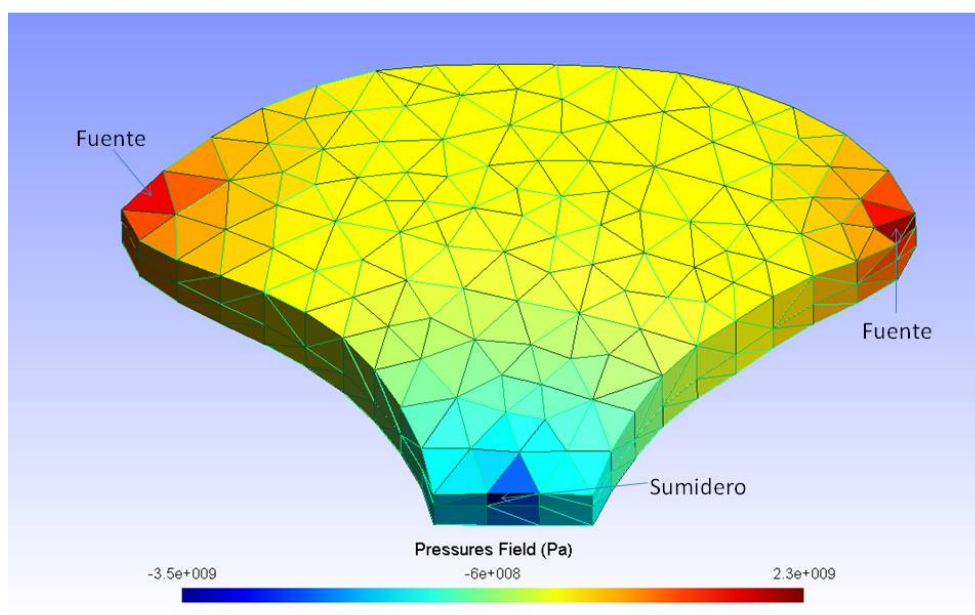


Figura 2: Campo de presiones modelo mixto caso 3D y ubicación de fuentes y sumideros.

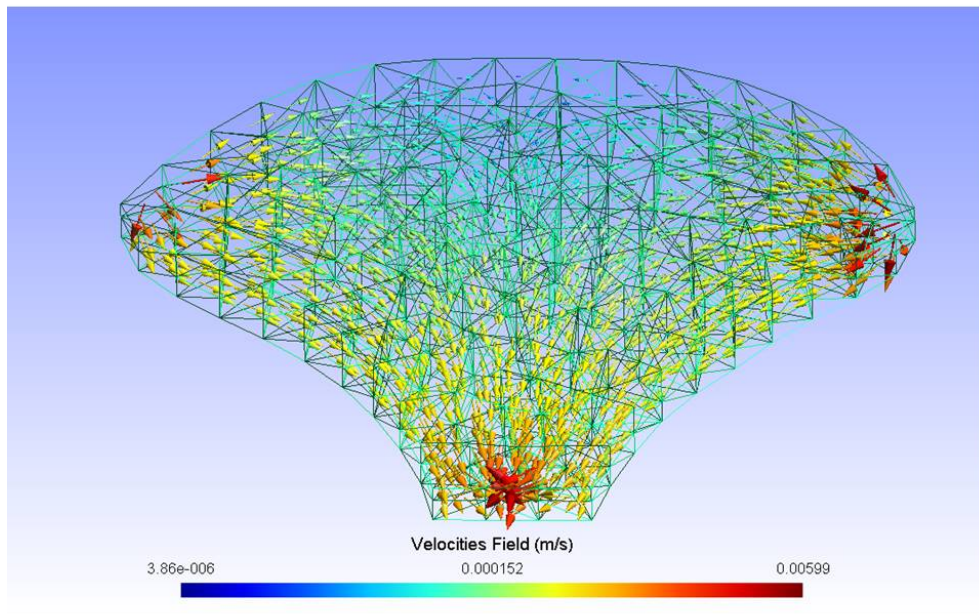


Figura 3: Campo de velocidades modelo mixto caso 3D

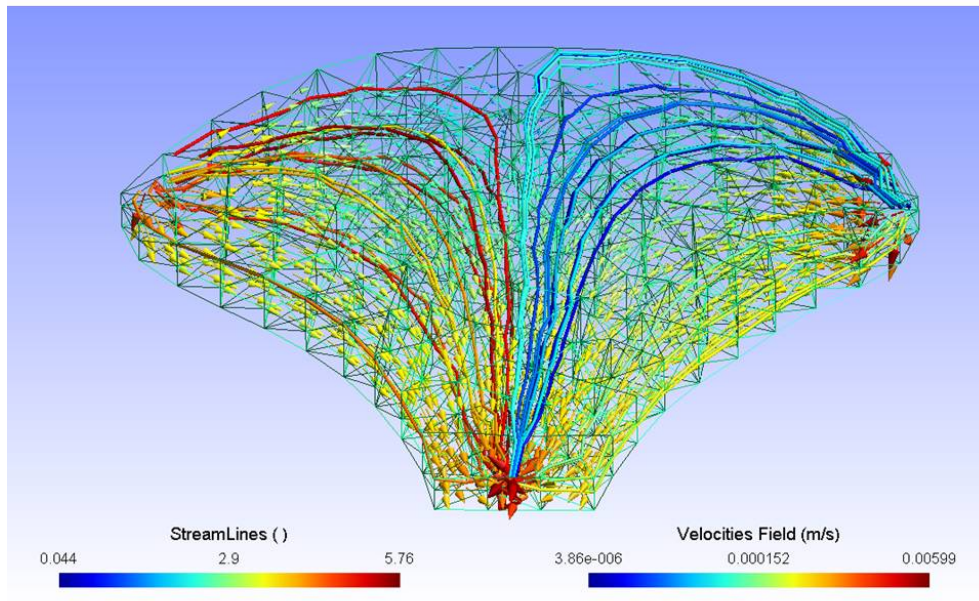


Figura 4: Campo de velocidades y líneas de corriente caso 3D

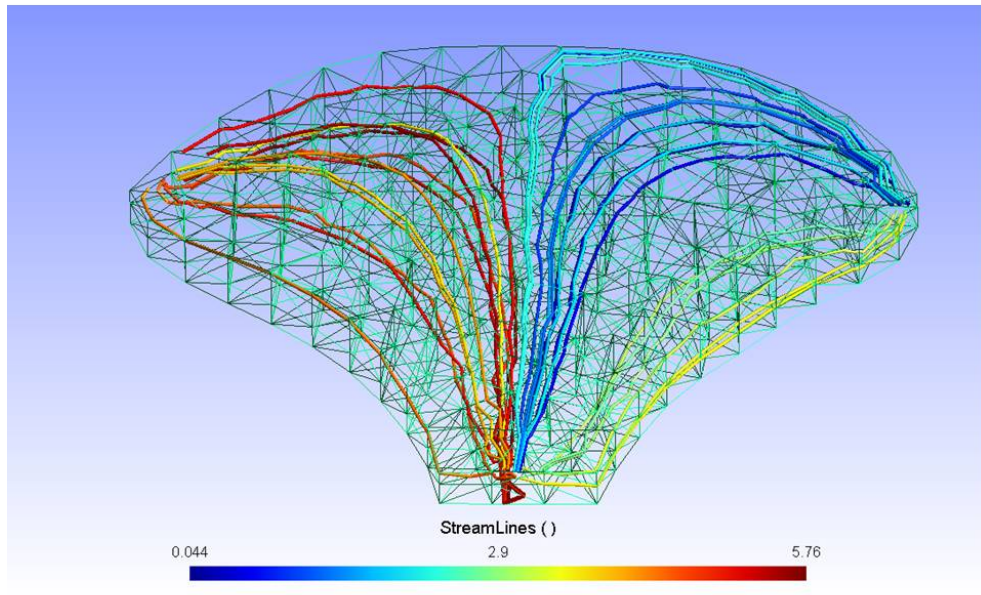


Figura 5: Líneas de corriente caso 3D

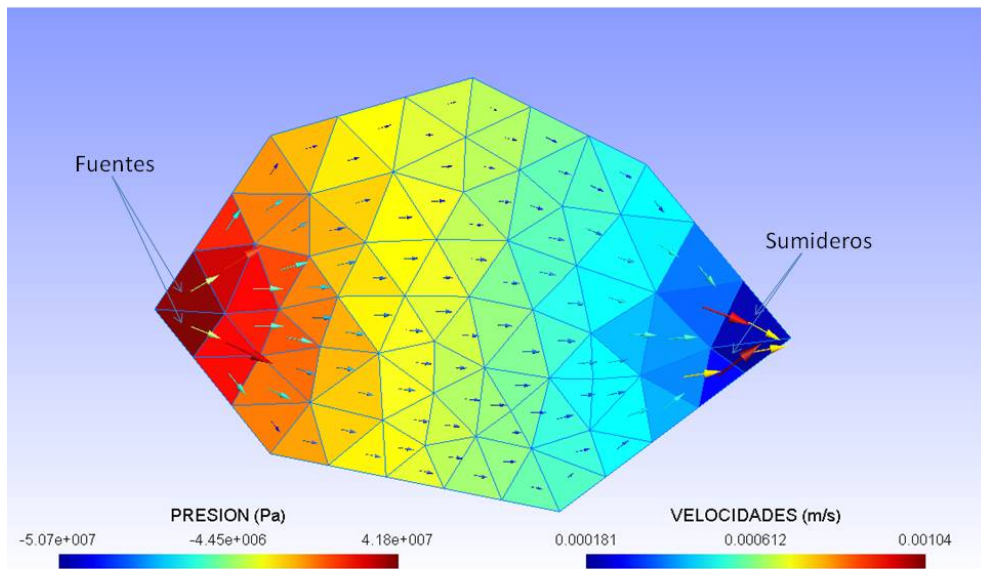


Figura 6: Solución velocidad-presión para un modelo mixto caso 2D

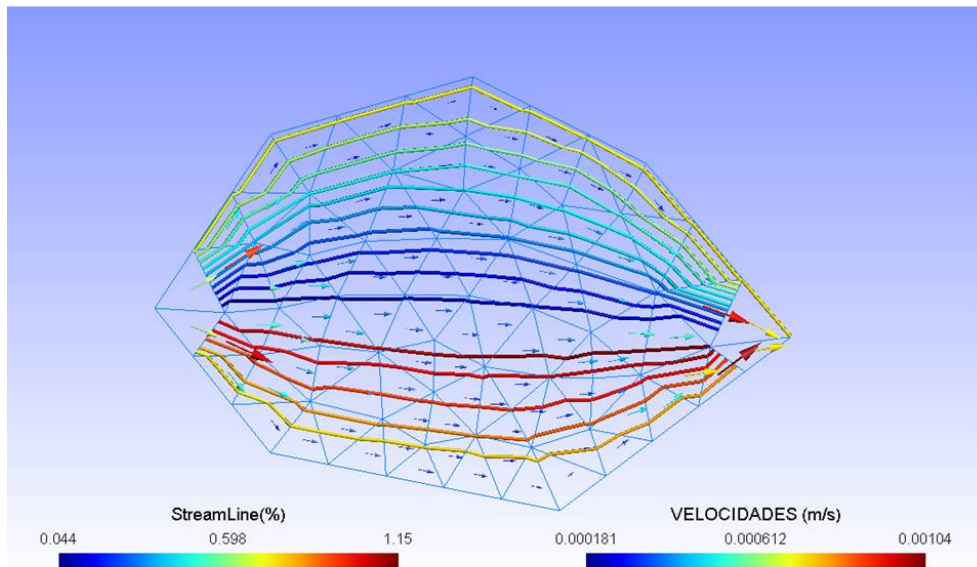


Figura 7: Campo de velocidades y líneas de corriente caso 2D

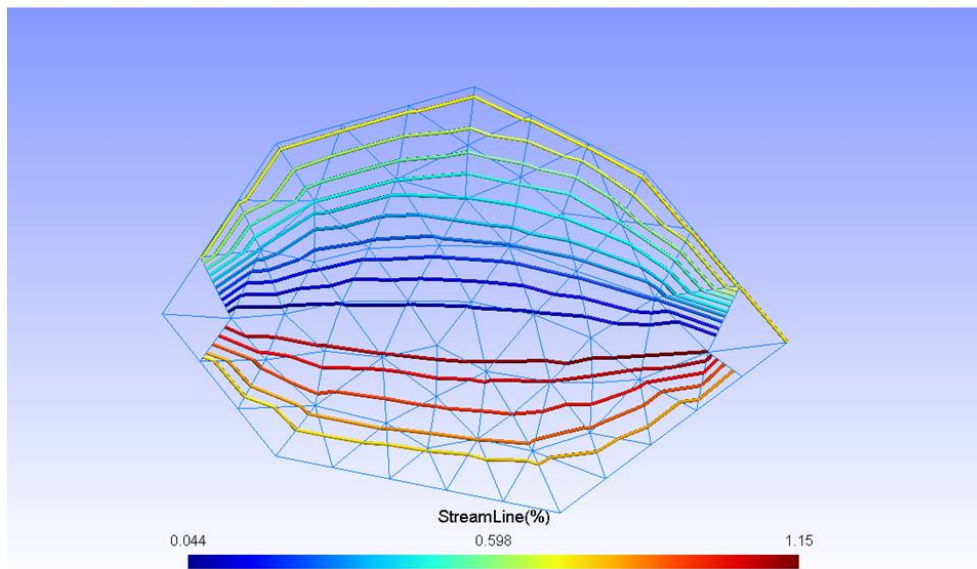


Figura 8: Líneas de corriente caso 2D

5. Conclusiones

- Se ha presentado un método simple y general para trazar líneas de corriente utilizando como base el campo de velocidades obtenido de un modelo mixto de flujo.
- El trazado de líneas de corriente utilizando esta metodología puede hacerse en dos o tres dimensiones, y las geometrías pueden ser regulares o irregulares, esto es, una geometría general.
- La única condición requerida para el trazado de líneas de corriente en esta metodología es que, las mallas de elemento finito utilizadas para discretizar el dominio sean triángulos en el caso 2D y tetraedros en el caso 3D.
- Este trabajo constituye una extensión a 3D del trabajo hecho por Sébastien [1] sobre el mismo tema en geometrías generales en 2D.

Referencias

- [1] A. Sébastien F. Matringe, *Mixed Finite Element Methods for Discretization and Streamline Tracing*, Doctor of Philosophy Thesis, Stanford University, 2008
- [2] Norberto C. Vera Guzmán, *Construcción de Matrices de elemento finito en 3D para Geometrías Generales*, Reportes Internos 2009, Instituto de Geofísica, UNAM.
- [3] Brezzi F, Fortin M. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer: New York, 1991.
- [4] Norberto C. Vera-Guzmán, *Funciones Base Vectoriales para RT0 en Triángulos y Tetraedros*, Reportes Internos 2006, Instituto de Geofísica, UNAM.
- [5] Akhil Data-Gupta, Michael J. King, *Streamline Simulation: Theory and Practice*, Society of Petroleum Engineers, Texas, 2007.