REPORTES INTERNOS 2013-03 / Noviembre de 2013

ENFOQUE MIXTO - MIXTO PARA FLUJO BIFÁSICO

Norberto C. Vera Guzmán

Instituto de Geofísica, UNAM
Ciudad Universitaria
04510 México, D. F.

REPORTES INTERNOS 2014-03 /
Noviembre de 2014

Editor / Ma. Aurora Armienta H.
Editor Técnico / Andrea Rostan Robledo
Diseño de portada e Interiores / Luis David Torres Ortuño
Edición / Freddy Godoy Olmedo
Apoyo Editorial / Elizabeth Morales Hernández
Vanesa Gómez Vivas

Enfoque mixto-mixto para flujo bifásico

Norberto C. Vera Guzmán

2 de abril de 2014

Índice

Índice de figuras

Enfoque mixto-mixto para flujo bifásico

Norberto C. Vera Guzmán

1. Introducción

En este trabajo se hace el planteamiento de un modelo de flujo bifásico inmiscible incompresible en una geometría general en 3D. Para ello usamos las ecuaciones de balance de masa de cada fase, las ecuaciones constitutivas de Darcy para cada fase, la restricción de saturación total del medio y la presión capilar definida como la diferencia entre las presiones de fase.

2. Planteamiento del modelo físico

Siguiendo el enfoque de la Mecánica del Medio Contínuo [1], la deducción del modelo físico de flujo bifásico inmiscible-incompresible, se hará utilizando las ecuaciones de masa de cada fase, las ecuaciones constitutivas representadas por la velocidad de Darcy de cada fase, la restricción de saturación total del medio y la relación entre presiones de fase p_c [2]. Finalmente, las ecuaciones de estado vienen dadas por las hipótesis: la temperatura del sistema es constante, la densidad de los fluidos y la porosidad del medio también son constantes.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho_\alpha S_\alpha) + \operatorname{div}(\rho_\alpha \boldsymbol{u}_\alpha) = q_\alpha, \quad \alpha = w, o,\\
&\boldsymbol{u}_\alpha = -\tfrac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha}\boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{grad} p_\alpha - \rho_\alpha \boldsymbol{g}\right), \quad \alpha = w, o,\\
&S_w + S_o = 1,\\
&p_c(S_w) = p_w - p_o.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Para el buen planteamiento de un problema, es necesario indicar la forma como interacciona el sistema con su medio ambiente y cual es el estado inicial de tal sistema. Esto se hace definiendo las condiciones de frontera y las condiciones iniciales, pero por cuestiones metodológicas, tales condiciones se darán cuando se haga la formulación variacional del modelo.

3. Planteamiento del modelo matemático

Con el propósito de tener un modelo que se pueda manejar desde un punto de vista matemático, combinamos algebraicamente las ecuaciones (1).
Entonces, bajo la consideración de incompresibilidad de los fluidos y saturación total del medio

$$
\begin{aligned}
\rho_w &= \text{cte},\\
\rho_w &= \text{cte},\\
S_w + S_o &= 1,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

sumando las ecuaciones de balance de masa para ambas fases y considerando $\phi = \text{cte}$. se obtiene:

$$
\begin{array}{rcl}
\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho_w S_w) + \mathrm{div}(\rho_w \boldsymbol{u}_w) & = & q_w \\
\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho_o S_o) + \mathrm{div}(\rho_o \boldsymbol{u}_o) & = & q_o \\
------------ & & \\
\mathrm{div}(\boldsymbol{u}_w + \boldsymbol{u}_o) & = & q_w/\rho_w + q_o/\rho_o \equiv \widehat{q}
\end{array}
$$

entonces, definiendo la velocidad total $\boldsymbol{u}$ como

$$
\boldsymbol{u} \;=\; \boldsymbol{u}_w + \boldsymbol{u}_o, \tag{3}
$$

se obtiene

$$
\mathrm{div}(\boldsymbol{u}) = \widehat{q} \tag{4}
$$

donde, se ha definido la razón total de inyección-extracción $\widehat{q}$ como

$$
\widehat{q} \;=\; q_w/\rho_w + q_o/\rho_o = \widehat{q}_w + \widehat{q}_o. \tag{5}
$$

Para propósitos de simplicidad en la notación, hacemos las siguientes definiciones

$$
\begin{array}{rcl}
\lambda_w(S_w) & = & \frac{k_{rw}(S_w)}{\mu_w}, \qquad \lambda_o(S_w) = \frac{k_{ro}(S_w)}{\mu_o}, \\
\lambda(S_w) & = & \lambda_w + \lambda_o, \\
f_w(S_w) & = & \frac{\lambda_w}{\lambda}, \qquad\qquad f_o(S_w) = \frac{\lambda_o}{\lambda}.
\end{array} \tag{6}
$$

Como puede verse de la ecuación anterior, f_w y f_o satisfacen la relación

$$
f_w(S_w) + f_o(S_w) = 1. \tag{7}
$$

De aquí en adelante, denotamos solo con S la saturación del agua

$$
S = S_w.
$$

Obtenemos la relación entre $\boldsymbol{u}_w$ y $\boldsymbol{u}$ usando (7)

$$
\begin{array}{rcl}
\boldsymbol{u}_w & = & (f_w + f_o)\boldsymbol{u}_w \\
& = & f_w\boldsymbol{u}_w + f_o\boldsymbol{u}_w + f_w\boldsymbol{u}_o - f_w\boldsymbol{u}_o \\
& = & f_o\boldsymbol{u}_w - f_w\boldsymbol{u}_o + f_w\boldsymbol{u}
\end{array} \tag{8}
$$

$$
\boldsymbol{u}_w = f_o\boldsymbol{u}_w - f_w\boldsymbol{u}_o + f_w\boldsymbol{u}
$$

Usando (8), la ecuación de balance de masa para la fase agua se puede expresar como

$$
\frac{\partial}{\partial t}(\phi S) + \mathrm{div}(\boldsymbol{u}_w) = \widehat{q}_w = q_w/\rho_w
$$

$$
\frac{\partial}{\partial t}(\phi S) + \mathrm{div}(f_o\boldsymbol{u}_w - f_w\boldsymbol{u}_o) + \mathrm{div}(f_w\boldsymbol{u}) = \widehat{q}_w \tag{9}
$$

Ahora bien, si desarrollamos el término $(f_o\boldsymbol{u}_w - f_w\boldsymbol{u}_o)$ y utilizamos la definición de presión capilar $(1)_4$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
f_o\boldsymbol{u}_w - f_w\boldsymbol{u}_o &= -f_o\lambda_w\boldsymbol{K}(\boldsymbol{grad}\,p_w - \rho_w\boldsymbol{g}) + f_w\lambda_o\boldsymbol{K}(\boldsymbol{grad}\,p_o - \rho_o\boldsymbol{g}) \\
&= -\lambda_o f_w\boldsymbol{K}(\boldsymbol{grad}\,(p_w - p_o) - (\rho_w - \rho_o)\boldsymbol{g}) \\
&= -\lambda_o f_w\boldsymbol{K}(\boldsymbol{grad}\,(p_c) - \rho_{wo}\boldsymbol{g})
\end{aligned} \tag{10}
$$

sustituyendo (10) en (9) obtenemos

$$
\frac{\partial}{\partial t}(\phi S) - \operatorname{div}\{\lambda_o f_w\boldsymbol{K}(\boldsymbol{grad}\,(p_c) - \rho_{wo}\boldsymbol{g})\} + \operatorname{div}(f_w\boldsymbol{u}) = \widehat{q}_w \tag{11}
$$

Si definimos un nuevo campo

$$
\boldsymbol{w} = -\lambda_o f_w\boldsymbol{K}(\boldsymbol{grad}\,(p_c) - \rho_{wo}\boldsymbol{g}) \tag{12}
$$

entonces la ecuación (11) puede expresarse como

$$
\frac{\partial}{\partial t}(\phi S) + \operatorname{div}(\boldsymbol{w}) + \operatorname{div}(f_w\boldsymbol{u}) = \widehat{q}_w \tag{13}
$$

Las ecuaciones (12) y (13) constituyen un modelo mixto $(\boldsymbol{w}, S)$

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{w} = -\lambda_o f_w\boldsymbol{K}(\boldsymbol{grad}\,(p_c) - \rho_{wo}\boldsymbol{g}), \\
&\frac{\partial}{\partial t}(\phi S) + \operatorname{div}(\boldsymbol{w}) + \operatorname{div}(f_w\boldsymbol{u}) = \widehat{q}_w.
\end{aligned} \tag{14}
$$

Ahora bien, partiendo de la definición de velocidad total (3), hacemos el siguiente desarrollo

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u}_w + \boldsymbol{u}_o \\
&= -\lambda_w\boldsymbol{K}(\boldsymbol{grad}\,p_w - \rho_w\boldsymbol{g}) - \lambda_o\boldsymbol{K}(\boldsymbol{grad}\,p_o - \rho_o\boldsymbol{g}) \\
&= -\boldsymbol{K}\left\{\lambda_w\boldsymbol{grad}\,p_w - \lambda_w\rho_w\boldsymbol{g} + \lambda_o\boldsymbol{grad}\,p_o - \lambda_o\rho_o\boldsymbol{g}\right\} \\
&= -\boldsymbol{K}\left\{\lambda_w\boldsymbol{grad}\,p_w + \lambda_o\boldsymbol{grad}\,p_o - (\lambda_w\rho_w + \lambda_o\rho_o)\boldsymbol{g}\right\}, \\
&= -\boldsymbol{K}\lambda\left\{f_w\boldsymbol{grad}\,p_w + f_o\boldsymbol{grad}\,p_o - (f_w\rho_w + f_o\rho_o)\boldsymbol{g}\right\}.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Ahora bien, si utilizamos la definición de p_c, la propiedad de f_w y f_o y desarrollamos el término $\nabla p_w + \nabla p_o + (f_w - f_o)\nabla p_c$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\nabla p_w + \nabla p_o + (f_w - f_o)\nabla p_c &= \nabla p_w + \nabla p_o + (f_w - f_o)(\nabla p_w - \nabla p_o) \\
&= \nabla p_w + \nabla p_o + f_w\nabla p_w - f_w\nabla p_o - f_o\nabla p_w + f_o\nabla p_o \\
&= (1 + f_w - f_o)\nabla p_w + (1 - f_w + f_o)\nabla p_o \\
&= 2(f_w\nabla p_w + f_o\nabla p_o)
\end{aligned} \tag{16}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
f_w\boldsymbol{grad}p_w + f_o\boldsymbol{grad}p_o &= \tfrac{1}{2}\left(\nabla p_w + \nabla p_o + (f_w - f_o)\nabla p_c\right) \\
&= \boldsymbol{grad}\left\{\frac{1}{2}\left(p_w + p_o + \int_0^S (f_w - f_o)\frac{dp_c}{d\varsigma}d\varsigma\right)\right\} \\
&= \boldsymbol{grad}(p(S))
\end{aligned} \tag{17}
$$

donde, hemos definido la variable presión global $p(S)$ como

$$
p(S) = \frac{1}{2}\left(p_w + p_o + \int_0^S (f_w - f_o)\frac{dp_c}{d\varsigma}d\varsigma\right). \tag{18}
$$

En consecuencia, la relación entre velocidad total $\boldsymbol{u}$, (15), y presión global p, (18), está dada por

$$\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{K}\lambda \left\{ \boldsymbol{grad}\, p - (f_w\rho_w + f_o\rho_o)\boldsymbol{g} \right\} \tag{19}$$

Conjuntando las ecuaciones (19) y (4), se obtiene un modelo mixto en los campos velocidad-total-presión-global $(\boldsymbol{u}, p(S))$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u} = -\lambda \boldsymbol{K} \left\{ \nabla p - (f_w\rho_w + f_o\rho_o)\boldsymbol{g} \right\}, \\ &\operatorname{div}(\boldsymbol{u}) = \widehat{q}, \end{aligned} \tag{20}$$

y si lo asociamos con el primer modelo mixto obtenido, (14),

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{w} = -\lambda_o f_w \boldsymbol{K}(\boldsymbol{grad}\,(p_c) - \rho_{wo}\boldsymbol{g}), \\ &\frac{\partial}{\partial t}(\phi S) + \operatorname{div}(\boldsymbol{w}) + \operatorname{div}(f_w\boldsymbol{u}) = \widehat{q}_w. \end{aligned} \tag{21}$$

tenemos un sistema de dos modelos mixtos acoplados que describen el flujo bifásico en medios porosos en los campos $(\boldsymbol{u}, p)$ y $(\boldsymbol{w}, S)$.
Para concluir esta sección, presentamos la relación que guardan los campos matemáticos $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, p, S)$ con los campos físicos $(\boldsymbol{u}_w, \boldsymbol{u}_o, p_w, p_o, S, S_o)$. Considerando (8), (10) y (12), si conocemos $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{w}$, podemos obtener los campos $\boldsymbol{u}_w$ y $\boldsymbol{u}_o$ como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_w &= f_w\boldsymbol{u} + f_o\boldsymbol{u}_w - f_w\boldsymbol{u}_o, \\ &= f_w\boldsymbol{u} - \lambda_o f_w \boldsymbol{K}(\boldsymbol{grad}\,(p_c) - \rho_{wo}\boldsymbol{g}), \\ \boldsymbol{u}_w &= f_w\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}, \end{aligned}$$

y de la ecuación anterior

$$\begin{aligned} f_w\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} &= \boldsymbol{u}_w = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_o, \\ \boldsymbol{u}_o &= \boldsymbol{u} - f_w\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}, \\ \boldsymbol{u}_o &= f_o\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}, \end{aligned}$$

entonces, los campos físicos $\boldsymbol{u}_w$ y $\boldsymbol{u}_o$ pueden obtenerse como [11]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_w &= f_w\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}, \\ \boldsymbol{u}_o &= f_o\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}. \end{aligned} \tag{22}$$

De manera semejante, utilizando (18) y $(1)_4$, y obtenidas p y S

$$\begin{aligned} p_w + p_o &= 2p - \int_0^S (f_w - f_o)\frac{dp_c}{d\varsigma}d\varsigma \\ p_w + p_w - p_c &= 2p - \int_0^S (f_w - f_o)\frac{dp_c}{d\varsigma}d\varsigma \\ 2p_w &= 2p + p_c - \int_0^S (f_w - f_o)\frac{dp_c}{d\varsigma}d\varsigma \\ p_w &= \tfrac{1}{2}\left\{2p + p_c - \int_0^S (f_w - f_o)\frac{dp_c}{d\varsigma}d\varsigma\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_w + p_o &= 2p - \int_0^S (f_w - f_o)\frac{dp_c}{d\varsigma}d\varsigma \\ p_c + p_o + p_o &= 2p - \int_0^S (f_w - f_o)\frac{dp_c}{d\varsigma}d\varsigma \\ 2p_o &= 2p - p_c - \int_0^S (f_w - f_o)\frac{dp_c}{d\varsigma}d\varsigma \\ p_o &= \tfrac{1}{2}\left\{2p - p_c - \int_0^S (f_w - f_o)\frac{dp_c}{d\varsigma}d\varsigma\right\} \end{aligned}$$

obtenemos las presiones de cada fase (p_w) y (p_o), por medio de las relaciones

$$\begin{aligned} p_w &= \tfrac{1}{2}\left\{2p + p_c - \int_0^S (f_w - f_o)\frac{dp_c}{d\varsigma}d\varsigma\right\}, \\ p_o &= \tfrac{1}{2}\left\{2p - p_c - \int_0^S (f_w - f_o)\frac{dp_c}{d\varsigma}d\varsigma\right\}. \end{aligned} \tag{23}$$

Por último, dado que, la saturación de la fase acuosa es la misma en los modelos matemático y físico, obtenida S del modelo matemático, podemos usar $(1)_3$ para obtener la saturación de las fases acuosa S_w y no acuosa S_o por medio de

$$S_w = S, \qquad S_o = 1 - S. \tag{24}$$

Con esto concluimos esta sección del trabajo y pasamos ahora a la formulación variacional de los modelos.

4. Formulación Variacional de los Modelos

Antes de formular variacionalmente los modelos (20) y (21), vamos a desarrollar la ecuación $(21)_2$ utilizando una derivada total para poder hacer mas fácil su tratamiento [6].

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(\phi S) + \mathrm{div}(\boldsymbol{w}) + \mathrm{div}(f_w \boldsymbol{u}) = \widehat{q}_w \\
&\phi \frac{\partial S}{\partial t} + f_w^{'} \nabla S \cdot \boldsymbol{u} + f_w \mathrm{div}(\boldsymbol{u}) + \mathrm{div}(\boldsymbol{w}) = \widehat{q}_w \\
&\phi \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{f_w^{'}}{\phi} \boldsymbol{u} \cdot \nabla S \right) + \mathrm{div}(\boldsymbol{w}) = \widehat{q}_w - f_w \widehat{q} \\
&\phi \frac{dS}{dt} + \mathrm{div}(\boldsymbol{w}) = \widehat{q}_w - f_w \widehat{q}
\end{aligned} \tag{25}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \boldsymbol{b} \cdot \nabla S \right) \\
\boldsymbol{b} &= \frac{f_w^{'}}{\phi} \boldsymbol{u}
\end{aligned} \tag{26}$$

Entonces, utilizando (25), el modelo (21) queda expresado como

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w} = -\lambda_o f_w \boldsymbol{K} (\boldsymbol{grad}\,(p_c) - \rho_{wo} \boldsymbol{g}), \\
\phi \frac{dS}{dt} + \mathrm{div}(\boldsymbol{w}) = \widehat{q}_w - f_w \widehat{q}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Ahora bien, de acuerdo con Pironneau [6], una aproximación temporal discreta de $(26)_1$ puede expresarse como

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t} + \boldsymbol{b} \cdot \nabla S \right)^{t+1} \cong \tfrac{1}{\triangle t} \left\{ S^{t+1}(\boldsymbol{x}) - S^t(X^t(\boldsymbol{x})) \right\} \tag{28}$$

donde: $\triangle t$ es un intervalo de tiempo, t y $t+1$ son dos pasos de tiempo consecutivos y, $X^t(\boldsymbol{x})$ es una aproximación de $X(\boldsymbol{x}, (t+1)\triangle t; t\triangle t)$ que puede ser expresada por medio de un esquema de Euler como

$$X^t(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^t(\boldsymbol{x}) \triangle t, \tag{29}$$

entonces, usando (29) en un esquema implícito de Euler, podemos expresar $(27)_2$ en la forma

$$\phi S^{t+1} + \triangle t \ \mathrm{div} \ \boldsymbol{w}^{t+1} = \phi S^t(X^t) + \triangle t \left(\widehat{q}_w - f_w \widehat{q} \right)^{t+1}, \tag{30}$$

y en consecuencia, el Modelo Mixto $(\boldsymbol{w}, S)$ (27) discreto en el tiempo, considerando $p_c^{'} \neq 0$ queda expresado como

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{w} = -\lambda_o f_w p_c^{'} \boldsymbol{K} \left(\nabla S + \tfrac{\rho_{wo}}{p_c^{'}} \boldsymbol{g} \right), \\
&\phi S^{t+1} + \triangle t \ \mathrm{div} \ \boldsymbol{w}^{t+1} = \phi S^t(X^t) + \triangle t \left(\widehat{q}_w - f_w \widehat{q} \right)^{t+1}.
\end{aligned} \tag{31}$$

En la formulación variacional del problema, se usarán los modelos mixtos acoplados (20) y (31).

$$
\begin{array}{l}
\text{Modelo Mixto} \quad (\boldsymbol{u}, p): \\
\boldsymbol{u} = -\lambda \boldsymbol{K} \left\{ \nabla p - (f_w \rho_w + f_o \rho_o) \boldsymbol{g} \right\}, \\
\operatorname{div}(\boldsymbol{u}) = \widehat{q},
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\text{Modelo Mixto} \quad (\boldsymbol{w}, S): \\
\boldsymbol{w} = -\lambda_o f_w p_c^{'} \boldsymbol{K} \left(\nabla S + \frac{\rho_{wo}}{p_c^{'}} \boldsymbol{g} \right), \\
\phi S^{t+1} + \triangle t \ \operatorname{div} \ \boldsymbol{w}^{t+1} = \phi S^t(X^t) + \triangle t \left(\widehat{q}_w - f_w \widehat{q} \right)^{t+1}.
\end{array}
$$

En la formulación variacional de los modelos (20) y (31), incorporamos condiciones de frontera y condiciones iniciales para ambos modelos [5]. Las condiciones de frontera están definidas como:

$$
\begin{array}{rcllr}
\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} & = & \widehat{u}_n & \text{sobre} & \partial\Omega_N \times [0, T), \\
p & = & \widehat{p} & \text{sobre} & \partial\Omega_D \times [0, T), \\
\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n} & = & \widehat{w}_n & \text{sobre} & \partial\Omega_N \times [0, T), \\
S & = & \widehat{S}_w & \text{sobre} & \partial\Omega_D \times [0, T),
\end{array}
\tag{32}
$$

y las condiciones iniciales como:

$$
\left.
\begin{array}{r}
p(\boldsymbol{x}, 0) = p_0(\boldsymbol{x}), \\
S(\boldsymbol{x}, 0) = S_{w0}(\boldsymbol{x}),
\end{array}
\right\} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega.
\tag{33}
$$

Utilizaremos los siguientes espacios funcionales

$$
\begin{array}{rcl}
\boldsymbol{V}(\Omega) & = & \boldsymbol{H}(\operatorname{div}; \Omega) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega) : \operatorname{div}\boldsymbol{v} \in L^2(\Omega) \right\}, \\
Y(\Omega) & = & L^2(\Omega),
\end{array}
\tag{34}
$$

y la siguiente notación

$$
\begin{array}{rl}
\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \displaystyle\int_\Omega (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) d\Omega, & \text{para } (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \text{ funciones vectoriales} \\
\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_\Omega (f g) d\Omega, & \text{para } (f, g) \text{ funciones escalares}
\end{array}
\tag{35}
$$

para hacer la formulación variacional de los modelos mixtos (20) y (31).
Para el modelo $(\boldsymbol{u}, p)$ tenemos

$$
\begin{array}{rcll}
\left\langle \frac{1}{\lambda} \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \right\rangle & = & \langle -\nabla p, \boldsymbol{v} \rangle + \langle (f_w \rho_w + f_o \rho_o) \boldsymbol{g}, \boldsymbol{v} \rangle, & \\
& = & \langle p, \operatorname{div}\boldsymbol{v} \rangle - \displaystyle\int_{\partial\Omega} (\gamma p)(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) d\partial\Omega + \langle (f_w \rho_w + f_o \rho_o) \boldsymbol{g}, \boldsymbol{v} \rangle, & \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(\Omega), \\
\langle \operatorname{div}\boldsymbol{u}, q \rangle & = & \langle \widehat{q}, q \rangle, & \forall q \in Y(\Omega).
\end{array}
\tag{36}
$$

Para el modelo $(\boldsymbol{w}, S)$ se tiene

$$
\begin{array}{rcl}
\left\langle \frac{1}{\lambda_o f_w p_c^{'}} \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \right\rangle & = & \langle -\nabla S, \boldsymbol{v} \rangle - \left\langle \dfrac{\rho_{wo}}{p_c^{'}} \boldsymbol{g}, \boldsymbol{v} \right\rangle, \\
& = & \langle S, \operatorname{div}\boldsymbol{v} \rangle - \displaystyle\int_{\partial\Omega} (\gamma S)(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) d\partial\Omega - \left\langle \dfrac{\rho_{wo}}{p_c^{'}} \boldsymbol{g}, \boldsymbol{v} \right\rangle, \ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(\Omega), \\
\langle \phi S^{t+1}, r \rangle + \langle \triangle t \ \operatorname{div} \ \boldsymbol{w}^{t+1}, r \rangle & = & \langle \phi S^t(X^t), r \rangle + \langle \triangle t (\widehat{q}_w - f_w \widehat{q})^{t+1}, r \rangle, \ \forall r \in Y(\Omega).
\end{array}
\tag{37}
$$

En los sistemas (36) y (37), hemos incorporado condiciones de frontera para ambos problemas. En la siguiente sección, replantearemos (36) y (37) en espacios de dimension finita para buscar una solución aproximada al problema de flujo bifásico.

5. Modelos de Elemento Finito Mixto

En esta sección replanteamos los modelos (36) y (37) en espacios de dimension finita [3,4]. Sean $\boldsymbol{V}_h(\Omega)$ y $Y_h(\Omega)$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}_h(\Omega) &= [\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2, ..., \boldsymbol{\phi}_n] \subset \boldsymbol{V}(\Omega) \\ Y_h(\Omega) &= [\psi_1, \psi_2, ..., \psi_m] \subset Y(\Omega) \end{aligned} \tag{38}$$

subespacios de dimension finita de los espacios originales $\boldsymbol{V}(\Omega)$ y $Y(\Omega)$ respectivamente. En (38), cada función $\boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_h(\Omega)$ y $y_h \in Y_h(\Omega)$, puede ser expresada como una combinación lineal del conjunto de funciones que generan al espacio, esto es, de manera general

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_h &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{\phi}_i, \quad \forall\, \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_h(\Omega), \\ y_h &= \sum_{l=1}^{t} \beta_l \psi_l, \quad \forall\, y_h \in Y_h(\Omega). \end{aligned} \tag{39}$$

Entonces, considerando solo funciones de $\boldsymbol{V}_h(\Omega)$ y $Y_h(\Omega)$ podemos expresar (36) y (37) como

$$\begin{aligned} \left\langle \tfrac{1}{\lambda} \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h \right\rangle &= \langle -\nabla p_h, \boldsymbol{v}_h \rangle + \langle (f_w \rho_w + f_o \rho_o) \boldsymbol{g}, \boldsymbol{v} \rangle\,, \\ &= \langle p_h, \mathrm{div} \boldsymbol{v}_h \rangle - \int_{\partial\Omega} (\gamma p_h)(\boldsymbol{v}_h \cdot \boldsymbol{n}) d\partial\Omega + \langle (f_w \rho_w + f_o \rho_o) \boldsymbol{g}, \boldsymbol{v}_h \rangle\,, \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_h(\Omega), \\ \langle \mathrm{div} \boldsymbol{u}_h, q_h \rangle &= \langle \widehat{q}, q_h \rangle\,, \qquad \forall q_h \in Y_h(\Omega), \end{aligned} \tag{40}$$

y

$$\begin{aligned} &\left\langle \tfrac{1}{\lambda_o f_w p_c'} \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{w}_h, \boldsymbol{v}_h \right\rangle = \langle -\nabla S_h, \boldsymbol{v}_h \rangle - \left\langle \frac{\rho_{wo}}{p_c'} \boldsymbol{g}, \boldsymbol{v}_h \right\rangle, \\ &\quad = \langle S_h, \mathrm{div} \boldsymbol{v}_h \rangle - \int_{\partial\Omega} (\gamma S_h)(\boldsymbol{v}_h \cdot \boldsymbol{n}) d\partial\Omega - \left\langle \frac{\rho_{wo}}{p_c'} \boldsymbol{g}, \boldsymbol{v}_h \right\rangle, \qquad \forall \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_h(\Omega), \\ &\left\langle \phi S_h^{t+1}, r_h \right\rangle + \left\langle \triangle t \ \mathrm{div}\ \boldsymbol{w}_h^{t+1}, r_h \right\rangle = \langle \phi S_h^t(X^t), r_h \rangle \\ &\qquad + \langle \triangle t (\widehat{q}_w - f_w \widehat{q})^{t+1}, r_h \rangle\,, \quad \forall r_h \in Y_h(\Omega), \end{aligned} \tag{41}$$

respectivamente.

Con el propósito de obtener los sistemas de ecuaciones asociados a cada modelo, expresamos cada campo de (40) y (41) como una combinación lineal. Para los campos vectoriales se tiene

$$\begin{aligned} \text{velocidad total} &= \boldsymbol{u}_h = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{\phi}_i, \\ \text{flujo de saturación} &= \boldsymbol{w}_h = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \boldsymbol{\phi}_i, \\ \text{variacion} &= \boldsymbol{v}_h = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \boldsymbol{\phi}_i, \end{aligned} \tag{42}$$

y para los campos escalares tenemos

$$
\begin{aligned}
\text{presión global} &= p_h &= \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \psi_l,\\
\text{variación} &= q_h &= \sum_{l=1}^{m} \nu_l \psi_l,\\
\text{saturación agua} &= S_h &= \sum_{l=1}^{m} \sigma_l \psi_l,\\
\text{variación} &= r_h &= \sum_{l=1}^{m} \pi_l \psi_l.
\end{aligned} \tag{43}
$$

Podemos expresar en forma mas compacta cada uno de los campos vectoriales y escalares definidos en (42) y (43) usando una un producto de matrices [9,10]. Aclaramos esto con un ejemplo

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{\phi}_1\alpha_1 + \boldsymbol{\phi}_2\alpha_2 + ... + \boldsymbol{\phi}_n\alpha_n\\
&= [\boldsymbol{\phi}_1\boldsymbol{\phi}_2...\boldsymbol{\phi}_n] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_n \end{bmatrix}\\
&= \boldsymbol{\phi}^T\boldsymbol{\alpha}
\end{aligned} \tag{44}
$$

Entonces, los campos vectoriales y escalares (42) y (43) se pueden expresar como

$$
\left(\begin{array}{rcccc}
\text{vel.tot} &=& \boldsymbol{u}_h &=& \boldsymbol{\phi}^T\boldsymbol{\alpha},\\
\text{fluj.sat} &=& \boldsymbol{w}_h &=& \boldsymbol{\phi}^T\boldsymbol{\delta},\\
\text{var.vect} &=& \boldsymbol{v}_h &=& \boldsymbol{\phi}^T\boldsymbol{\beta},
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{rcccc}
\text{pres.glob} &=& p_h &=& \boldsymbol{\psi}^T\boldsymbol{\lambda},\\
\text{var.esc} &=& q_h &=& \boldsymbol{\psi}^T\boldsymbol{\nu},\\
\text{sat.agua} &=& S_h &=& \boldsymbol{\psi}^T\boldsymbol{\sigma},\\
\text{var.esc} &=& r_h &=& \boldsymbol{\psi}^T\boldsymbol{\pi}.
\end{array}\right) \tag{45}
$$

Ahora bien, utilizando (45) podemos expresar (40), modelo $(\boldsymbol{u}, p)$ en la forma

$$
\begin{aligned}
\left\langle \tfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h \right\rangle &= \langle p_h, \mathrm{div}\boldsymbol{v}_h\rangle - \int_{\partial\Omega}(\gamma p_h)(\boldsymbol{v}_h\cdot\boldsymbol{n})d\partial\Omega + \langle (f_w\rho_w + f_o\rho_o)\boldsymbol{g}, \boldsymbol{v}_h\rangle\,,\\
\langle \mathrm{div}\boldsymbol{u}_h, q_h\rangle &= \langle \widehat{q}, q_h\rangle\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} &= \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\beta}, & \forall\boldsymbol{\beta}\in\Re^n\\
\boldsymbol{B\alpha}\cdot\boldsymbol{\nu} &= -\widehat{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{\nu}, & \forall\boldsymbol{\nu}\in\Re^m
\end{aligned} \tag{46}
$$

donde:

$$
\begin{aligned}
A_{ij} &= \int_\Omega \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\phi}_j\cdot\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\phi}_i d\Omega,\\
B_{mj} &= -\int_\Omega \psi_m \mathrm{div}\boldsymbol{\phi}_j d\Omega,\\
f_j &= \int_\Omega (f_w\rho_w + f_o\rho_o)\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{\phi}_j d\Omega - \int_{\partial\Omega}\widehat{p}\boldsymbol{\phi}_j\cdot\boldsymbol{n}d\partial\Omega,\\
\widehat{q}_m &= \int_\Omega \widehat{q}\psi_m d\Omega.
\end{aligned} \tag{47}
$$

Como una forma de ilustrar la obtención de matrices y vectores para los sistemas, hacemos el desarrollo en detalle para obtener las matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$.

$$
\begin{aligned}
\left\langle \tfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h \right\rangle &= \left\langle \tfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\phi}^T\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\phi}^T\boldsymbol{\beta} \right\rangle \\
&= \left\langle \tfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\phi}^T\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \right\rangle \\
&= \left\langle \tfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{\phi}\otimes\left(\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\phi}\right)\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \right\rangle \\
&= \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle \mathrm{div}\boldsymbol{u}_h, q_h \rangle &= \left\langle \mathrm{div}(\boldsymbol{\phi}^T\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\psi}^T\boldsymbol{\nu} \right\rangle \\
&= \left\langle \boldsymbol{\psi}(\mathrm{div}\boldsymbol{\phi})^T\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\nu} \right\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{\psi}\otimes(\mathrm{div}\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\nu} \rangle \\
&= -\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nu}
\end{aligned}
$$

y también, utilizando (45), obtenemos (41), modelo $(\boldsymbol{w}, S)$ en la forma

$$
\begin{aligned}
\left\langle \tfrac{1}{\lambda_o f_w p_c'}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{w}_h, \boldsymbol{v}_h \right\rangle &= \langle S_h, \mathrm{div}\boldsymbol{v}_h \rangle - \int_{\partial\Omega}(\gamma S_h)(\boldsymbol{v}_h\cdot\boldsymbol{n})d\partial\Omega - \left\langle \frac{\rho_{wo}}{p_c'}\boldsymbol{g}, \boldsymbol{v}_h \right\rangle, \\
\left\langle \phi S_h^{t+1}, r_h \right\rangle + \left\langle \triangle t \ \mathrm{div}\ \boldsymbol{w}_h^{t+1}, r_h \right\rangle &= \langle \phi S_h^t(X^t), r_h \rangle + \langle \triangle t(\widehat{q}_w - f_w\widehat{q})^{t+1}, r_h \rangle,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{C}\boldsymbol{\delta}^{t+1}\cdot\boldsymbol{\beta} &= \boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\sigma}^{t+1}\cdot\boldsymbol{\beta} && \forall\boldsymbol{\beta}\in\Re^n \\
\boldsymbol{M}\boldsymbol{\sigma}^{t+1}\cdot\boldsymbol{\pi} - \triangle t\boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}^{t+1}\cdot\boldsymbol{\pi} &= \boldsymbol{M}\boldsymbol{\sigma}^t(X^t)\cdot\boldsymbol{\pi} + \triangle t\tilde{\boldsymbol{q}}^{t+1}\cdot\boldsymbol{\pi} && \forall\boldsymbol{\pi}\in\Re^m
\end{aligned}
\tag{48}
$$

El signo $-$ en (48) se debe a la definicion de la matriz $\boldsymbol{B}$
donde:

$$
\begin{aligned}
C_{ij} &= \int_\Omega \frac{1}{\lambda_o f_w p_c'}\boldsymbol{\phi}_j\cdot\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\phi}_i d\Omega = \frac{1}{f_o f_w p_c'}A_{ij}, \\
B_{mj} &= -\int_\Omega \psi_m \mathrm{div}\boldsymbol{\phi}_j d\Omega, \\
M_{mk} &= \int_\Omega \phi\psi_m\psi_k d\Omega, \\
d_j &= -\int_\Omega \frac{\rho_{wo}}{p_c'}\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{\phi}_j d\Omega - \int_{\partial\Omega}\widehat{S}_w\boldsymbol{\phi}_j\cdot\boldsymbol{n}d\partial\Omega, \\
\tilde{q}_m^{t+1} &= \int_\Omega(\widehat{q}_w - f_w\widehat{q})^{t+1}\psi_m d\Omega.
\end{aligned}
\tag{49}
$$

La presión capilar $p_c(S)$ puede expresarse en forma analítica pero, también es común expresarla a través de una tabla de valores dependiente de la saturación S. Si lo último fuera el caso, para cada intervalo de la saturación $[S_1, S_2]$, la presión capilar $p_c(S)$ puede darse como una función lineal de la forma

$$
p_c(S) = \frac{(S_2 - S)}{S_2 - S_1}p_c(S_1) + \frac{(S - S_1)}{S_2 - S_1}p_c(S_2) \tag{50}
$$

donde: $0 \leq S_1, S_2 \leq 1$ son dos valores de la saturación para los cuales, la presión capilar es $p_c(S_1)$ y $p_c(S_2)$ respectivamente. Ahora bien, de acuerdo con (50), la derivada de la presión capilar $p_c'(S)$ puede expresarse entonces como

$$
p_c'(S) = \frac{p_c(S_2) - p_c(S_1)}{S_2 - S_1}. \tag{51}
$$

La ecuación (51) nos permite usar $p_c^{'}$ en el cálculo de matrices y vectores de los modelos $(\boldsymbol{u}, p)$ y $(\boldsymbol{w}, S)$.
De acuerdo con (46) y (48), los sistemas a resolver son:

$$\begin{array}{ll} \text{Modelo mixto } (\boldsymbol{u}, p): & \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\beta}, & \forall\boldsymbol{\beta}\in\Re^n \\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nu} = -\widehat{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{\nu}, & \forall\boldsymbol{\nu}\in\Re^m \end{array} \tag{52}$$

y

$$\begin{array}{ll} \text{Model mixto } (\boldsymbol{w}, S): & \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{\delta}^{t+1}\cdot\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\sigma}^{t+1}\cdot\boldsymbol{\beta}, & \forall\boldsymbol{\beta}\in\Re^n \\ \boldsymbol{M}\left(\boldsymbol{\sigma}^{t+1} - \boldsymbol{\sigma}^t(X^t)\right)\cdot\boldsymbol{\pi} = \triangle t\left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}^{t+1} + \tilde{\boldsymbol{q}}^{t+1}\right)\cdot\boldsymbol{\pi}, & \forall\boldsymbol{\pi}\in\Re^m \end{array} \tag{53}$$

En la siguiente sección desarrollamos dos algoritmos de punto próximo para resolver los sistemas (52) y (53).

6. Algoritmos de punto próximo

En esta sección desarrollamos un algoritmo de punto próximo [7,8] que usaremos para resolver los problemas mixtos (52) y (53). Para el desarrollo de este algoritmo, consideramos un modelo mixto abstracto general

$$(\mathbf{M})\left\{\begin{array}{l} \text{Encuentre } (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda}^*) \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\mathcal{A}}) \times \boldsymbol{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\partial G}^*): \\ -\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{\lambda}^* \in \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\alpha}), \\ \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\partial G}^*(\boldsymbol{\lambda}^*), \end{array}\right. \tag{54}$$

y construimos un algoritmo de punto próximo con base en el problema mixto abstracto $(\mathbf{M})$. Para ello, reformulamos este problema en la forma aumentada de proximación de dos campos. Sea

$$r > 0 \tag{55}$$

un parámetro real fijo. Entonces, escribiendo la ecuación dual de $(\mathbf{M})$ en la forma equivalente,

$$\boldsymbol{\lambda}^* + r\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\alpha} \in (\boldsymbol{I} + r\partial G^*)(\boldsymbol{\lambda}^*), \tag{56}$$

e introduciendo el operador resolvente del subdiferencial $\boldsymbol{\partial G^*}$, definido y caracterizado [7] por

$$\boldsymbol{J}^r_{\partial G^*} \equiv \boldsymbol{Prox}_{rG^*} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{Prox}_{rG\circ(\frac{1}{r})I}, \tag{57}$$

se obtiene un problema mixto parametrizado $(\mathbf{M})_r$ que tiene la siguiente interpretación de proximación

$$(\mathbf{M})_r\left\{\begin{array}{l} \text{Encuentre } (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda}^*) \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\mathcal{A}}) \times \boldsymbol{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\partial G}^*): \\ -\boldsymbol{\Lambda}^T\left(\boldsymbol{\lambda}^* - \boldsymbol{Prox}_{rG\circ(\frac{1}{r})I}(\boldsymbol{\lambda}^* + r\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\alpha})\right) \in (\boldsymbol{\mathcal{A}} + r\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{\Lambda})(\boldsymbol{\alpha}), \\ \boldsymbol{\lambda}^* = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Prox}_{rG\circ(\frac{1}{r})I}\right)(\boldsymbol{\lambda}^* + r\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\alpha}). \end{array}\right. \tag{58}$$

Esta forma aumentada del problema $(\mathbf{M})$ tiene la ventaja de ser un problema mixto bien condicionado para el cual los algoritmos tipo Uzawa son eficientes [3,7]. En consecuencia, de manera natural asociamos al problema $(\mathbf{M})$ el siguiente algoritmo tipo Uzawa para su resolución.

$$\begin{cases} \textbf{Alg1}. \text{ Dados } \boldsymbol{\alpha}_0 \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\mathcal{A}}) \ , \ \boldsymbol{\lambda}_0^* \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\partial G}^*), \\ \text{calcular } \ \boldsymbol{\alpha}_{n+1} \ \text{ y } \ \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^* \ \text{ para } \ n \geq 0: \\ -\boldsymbol{\Lambda}^T \left(\boldsymbol{\lambda}_n^* - \boldsymbol{Prox}_{rG\circ(\frac{1}{r})I}(\boldsymbol{\lambda}_n^* + r\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\alpha}_n)\right) \in (\boldsymbol{\mathcal{A}} + r\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{\Lambda})(\boldsymbol{\alpha}_{n+1}), \\ \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^* = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Prox}_{rG\circ(\frac{1}{r})I}\right)(\boldsymbol{\lambda}_n^* + r\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\alpha}_{n+1}). \end{cases} \tag{59}$$

Ahora que disponemos de **Alg1**, lo usaremos para obtener la solución de (52) y (53), con este propósito hacemos las siguientes identificaciones entre (52) y (59).

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\alpha}) &\simeq \{\boldsymbol{A\alpha} - \boldsymbol{f}\}, \\ \boldsymbol{\Lambda\alpha} &\simeq \{\boldsymbol{B\alpha}\}, \\ \boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{\lambda}^* &\simeq \{\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\lambda}\}, \\ r\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{\Lambda} &\simeq r\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B} \\ -\boldsymbol{Prox}_{rG\circ(\frac{1}{r})I}(\boldsymbol{\lambda}_n^* + r\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\alpha}_{n+1}) &\simeq \{-\widehat{\boldsymbol{q}}\}. \end{aligned} \tag{60}$$

Entonces, de acuerdo con las identificaciones (60), el **Alg1** para el componente velocidad total-presión global en el intervalo de tiempo $\triangle t$, queda expresado en forma explícita como,

$$\begin{cases} \textbf{Alg1}. \text{ Dados } \boldsymbol{\alpha}_0^t \in \Re^n, \boldsymbol{\lambda}_0^t \in \Re^m, \\ \text{calcular } \ \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^t \ \text{ y } \ \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^t, \ \ n \geq 0: \\ (\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\sigma^t}) + r\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B})\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^t = -\boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{\lambda}_n^t + r\widehat{\boldsymbol{q}}^t) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma^t}), \\ \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^t = \boldsymbol{\lambda}_n^t + r\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^t + r\widehat{\boldsymbol{q}}^t. \end{cases} \tag{61}$$

donde, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\sigma^t})$ y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma^t})$ cambian con el tiempo de acuerdo a los valores de la saturación del agua $\boldsymbol{\sigma^t}$ en el tiempo t. Los subíndices $(n, n+1)$ corresponden al proceso iterativo del algoritmo y, los superíndices (t), corresponden al paso de tiempo.
Para obtener un algoritmo que permita resolver (53), hacemos lo siguiente.

$$\begin{aligned} &\text{Model mixto } \ (\boldsymbol{w}, S): \\ &\boldsymbol{C}\boldsymbol{\delta}^{t+1} \cdot \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\sigma}^{t+1} \cdot \boldsymbol{\beta}, \qquad\qquad \forall \boldsymbol{\beta} \in \Re^n \\ &\boldsymbol{M}\left(\boldsymbol{\sigma}^{t+1} - \boldsymbol{\sigma}^t(X^t)\right) \cdot \boldsymbol{\pi} = \triangle t\left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}^{t+1} + \tilde{\boldsymbol{q}}^{t+1}\right) \cdot \boldsymbol{\pi}, \quad \forall \boldsymbol{\pi} \in \Re^m \end{aligned}$$

Expresando $(53)_2$ en la forma

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}\left(\boldsymbol{\sigma}^{t+1} - \boldsymbol{\sigma}^t(X^t)\right) &= \triangle t\left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}^{t+1} + \tilde{\boldsymbol{q}}^{t+1}\right) \\ \boldsymbol{\sigma}^{t+1} &= \boldsymbol{\sigma}^t(X^t) + \triangle t\boldsymbol{M}^{-1}\left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}^{t+1} + \tilde{\boldsymbol{q}}^{t+1}\right) \end{aligned} \tag{62}$$

y sustituyendo (62) en $(53)_1$, se obtiene:

$$(\boldsymbol{C} + \triangle t\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{\delta}^{t+1} = -\boldsymbol{B}^T\left(\boldsymbol{\sigma}^t(X^t) + \triangle t\boldsymbol{M}^{-1}\tilde{\boldsymbol{q}}^{t+1}\right) + \boldsymbol{d}^{t+1} \tag{63}$$

Entonces, utilizando (62) y (63) se plantea el algoritmo **Alg2**. para resolver (53).

$$\begin{cases} \textbf{Alg2}. \text{ Dados } \boldsymbol{\delta}_0 \in \Re^n, \boldsymbol{\sigma}_0 \in \Re^m, \\ \text{calcular } \ \boldsymbol{\delta}_{n+1} \ \text{ y } \ \boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \ \ n \geq 0: \\ (\boldsymbol{C} + \triangle t\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{\delta}_{n+1}^{t+1} = -\boldsymbol{B}^T\left(\boldsymbol{\sigma}_n^t(X^t) + \triangle t\boldsymbol{M}^{-1}\tilde{\boldsymbol{q}}\right) + \boldsymbol{d}^{t+1} \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n^t(X^t) + \triangle t\boldsymbol{M}^{-1}\left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}_{n+1}^{t+1} + \tilde{\boldsymbol{q}}\right) \end{cases} \tag{64}$$

El algoritmo **Alg2**. será programado para propósitos de experimentación numérica.

7. Conclusiones

El enfoque mixto-mixto para tratar un problema de flujo bifásico resulta ser muy sencillo desde su planteamiento hasta su resolución.
Su simplicidad se refleja tanto a nivel matemático como computacional:

- A nivel matemtico los modelos tienen la misma estructura.
- A nivel computacional basta con programar uno de ellos para tener la programación de ambos.

Tomando en cuenta estas propiedades de los modelos, un enfoque mixto-mixto para el problema de flujo bifásico es simple y útil.

Referencias

[1] Morton E. Gurtin, *An Introduction to Continuum Mechanics*, Academic Press, New York, 1981.

[2] Z. Chen, G.Huan and Y. Ma *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media*, SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2006.

[3] Brezzi F, Fortin M. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer: New York, 1991.

[4] A. Quarteroni and A. Valli, *Numerical Approximation of Partial Differential Equations,* Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[5] G. Alduncin and N. Vera-Guzman, Parallel Proximal-Point Algorithms for Mixed Finite Element Models of Flow in the Subsurface,Communications in Numerical Methods in Engineering , 20, pp 83-104, 2004.

[6] O. Pironneau, Methodes des Elements Finis pour les Fluides, Collection Recherches en Mathematiques Appliquees, sous la direction de P.G. Ciarlet et J.L. Lions, 1988, edit. Masson, Paris.

[7] G. Alduncin, *Numerical Resolvent Methods for Macro-Hybrid Mixed Variational Inequalities*, Numer. Funct. Anal. and Optimiz., 1998; 19:667-696.

[8] G. Alduncin., *Augmented Lagrangian Methods for the Quasistatic Viscoelastic two-body Contact Problem with Friction*. In Contact Mechanics. Curnier A (ed). PPUR: Lausanne, 1992; 337-360.

[9] N.Vera-Guzmán, 2009. Reporte Interno Construcción de Matrices de Elemento Finito en 3D para Geometrías Generales, Instituto de Geofísica, UNAM.

[10] N.Vera-Guzmán, 2006. Reporte Interno 2006-04 Funciones Base Vectoriales para Rto en Triángulos y Tetrahedros, Instituto de Geofísica, UNAM.

[11] N.Vera-Guzmán, 2005. Formulación Variacional y Aproximación de Elemento Finito para Flujo Multifásico en el Subsuelo, Tesis Doctoral, Posgrado en Ciencias de la Tierra.